$$\left(g^{-1}\right)'(x)=-\frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}=-\frac{1}{x^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2}}}$$

$$d'où : \left(g^{-1}\right)'(x)=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, x\in]1,+\infty[$$

c) $K(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ est continue sur $\left[\frac{3}{2},+\infty\right[$

$\Rightarrow K$ admet une primitive F sur $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ et

$\left(g^{-1}\right)'(x)=-K(x)\Rightarrow K(x)=-\left(g^{-1}\right)'(x)$

Donc : $\boxed{F(x)=-g^{-1}(x)+cte}$

Exercice 10

$$U(t)=\frac{1}{2t^2-2t+1}, t\in\mathbb{R}$$

$$g(x)=f\left(\frac{1+tgx}{2}\right), x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

1) $x\mapsto\frac{1+tgx}{2}=V(x)$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et $V\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\mathbb{R}$ et f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow g$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

2) $g'(x)=\left(\frac{1+tgx}{2}\right)'f'\left(\frac{1+tgx}{2}\right)$

$$=\left(\frac{1+tg^2x}{2}\right)\times U\left(\frac{1+tgx}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1+tg^2x}{2}\right)\left(\frac{1}{2\frac{(1+tgx)^2}{4}-2\left(\frac{1+tgx}{2}\right)+1}\right)$$

$$=\frac{1+tg^2x}{1+tg^2x+2tgx-2-2tgx+2}=1$$

$\Rightarrow g(x)=x+b, b\in\mathbb{R}$

Donc g est une application affine (de la forme : $ax+b$)

3) $f(1)-f(0)=?$

On a $tg\frac{\pi}{4}=1$ et $tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$

Donc $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=f(1)$ et $g\left(-\frac{\pi}{4}\right)=f(0)$

$$f(1)-f(0)=g\left(\frac{\pi}{4}\right)-g\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}+b\right)-\left(-\frac{\pi}{4}+b\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\boxed{f(1)-f(0)=\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 11

$x\in[0,\pi]$

$f(x)=3\sin x-2\sin^3 x$

1) $F(x)=a\cos x+b\cos^3 x$

$$F'(x)=-a\sin x-3b\sin x\cos^2 x$$
$$=-a\sin x-3b\sin x\left(1-\sin^2 x\right)$$
$$=-a\sin x-3b\sin x+3b\sin^3 x$$
$$=-(a+3b)\sin x+3b\sin^3 x$$
$$=f(x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-(a+3b)=3\\3b=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3-3b=-3+2=-1\\b=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

Donc : $\boxed{a=-1}$ et $\boxed{b=-\frac{2}{3}}$

D'où $F(x)=-\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x$

2) $f(x)=3\sin x-2\sin^2 x.\sin x$

$$=3\sin x-2\left(1-\cos^2 x\right)\sin x$$
$$=3\sin x-2\sin x+2\sin x\cos^2 x$$
$$=\sin x+2\sin x\cos^2 x$$
$$=(-\cos x)'+2(-\cos x)'.\cos^2 x$$

$$\boxed{F(x)=-\cos x-\frac{2}{3}\cos^3 x+cte}$$

Qarray.tn -Aqra Bled- Qarray.tn